UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA CURSO 2008–2009
PROBLEMAS

PARTE I: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 1: Matrices y sistemas de ecuaciones lineales

1-1. Calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

1-2. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcúlese razonadamente el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$.

1-3. Comprueba las siguientes identidades sin desarrollar los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ca & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$

1-4. Resolver la ecuación sin desarrollar el determinante, utilizando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

1-5. Calcula, simplificando previamente: a) $\begin{vmatrix} ab & 2b^2 & -bc \\ a^2c & 3abc & 0 \\ 2ac & 5bc & 2c^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & a & a & a \\ x & a & b & b \\ x & a & b & c \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

1-6. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^tA = I$. Demuestra que $|A| = \pm 1$.

1-7. Hallar el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1-8. Estudia, según los valores de x el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & x^2 & 1 \\ 1 & x^2 & x^3 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1-9. Suponiendo que A y B son matrices regulares ($\det \neq 0$), y que hay conformidad de órdenes para poder realizar las operaciones, despeja la matriz X en las expresiones siguientes:

(a) $X^t \cdot A = B$

(b) $(X \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B$

Calcula la matriz X en las ecuaciones anteriores si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1-10. Calcula, siempre que sea posible, la inversa de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

1-11. Calcula, siempre que sea posible, la inversa de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1-12. Dado el sistema $\left\{\begin{array}{l} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{array}\right.$ se pide calcular m para que el sistema

(a) no tenga solución,
(b) tenga infinitas soluciones,
(c) tenga solución única
(d) tenga una solución para la que $x = 3$.

1-13. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} x + ay = 1 \\ ax + z = 1 \\ ay + z = 2 \end{array}\right.$ se pide

(a) Expresarlo en forma matricial y escribir el vector de incógnitas, el del término independiente y el sistema homogéneo asociado.
(b) Discutir y resolver según los valores de a.

1-14. Discutir y resolver el sistema siguiente $\left\{\begin{array}{r} x + y + z + 2t - w = 1 \\ -x - 2y + 2w = -2 \\ x + 2z + 4t = 0 \end{array}\right.$

1-15. Discutir y resolver el sistema siguiente, según los valores de los parámetros:

$$\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + y + z = b \\ 2x + 2y + (a+1)\,z = 0 \end{array}\right.$$

1-16. Discutir y resolver el sistema siguiente, según los valores de los parámetros:

$$\left\{\begin{array}{r} x - 2y + bz = 3 \\ 5x + 2y = 1 \\ ax + z = 2 \end{array}\right.$$

1-17. Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,

$$\left\{\begin{array}{r} -x + y + z = 3 \\ x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right.$$

1-18. Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,

$$\left\{\begin{array}{r} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{array}\right.$$

1-19. Resolver mediante el método de Cramer el sistema siguiente,

$$\left\{\begin{array}{r} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y + 6z = -1 \end{array}\right.$$

1-20. Dado el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas siguiente,

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ ax + (a+3)y + 3z = 1 \end{array}\right.$$

(a) Estudiar si para algún valor de a el sistema es incompatible.
(b) Para cada valor del parámetro a, para el que el sistema sea compatible, escribir la expresión general de todas sus soluciones.

1-21. Dado el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{r} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right.$$

(a) Calcular m para que tenga algunas solución distinta a la trivial.
(b) resolverlo para el valor calculado en el apartado anterior.